6.2 De wereld in verhoudingen

Achtergrond

De wereld is vol met datgene wat wij verhoudingen noemen. In de proporties van mens en dier, in de vormen en ritmen der plantenwereld en in de kristalstructuren van de mineralen vinden we herkenbare verhoudingen. Ook binnen de stof zelf heerst structuur. Avogadro ontdekte, dat de elementen zich in verbindingen verhouden als eenvoudige, gehele getallen. (Bijvoorbeeld H_2O)
Een schitterend voorbeeld van verhoudingen vinden we in de muziek. Al kunnen we ten aanzien van een muziekstuk van mening verschillen over de tempi, de verhoudingen binnen de maat blijven gelijk en bepalen mede de herkenbaarheid van het stuk.
Van stond af aan is het kind dus omringd door een wereld vol verhoudingen, uiterlijke zowel als innerlijke, die vormend op hem werken, op een geheel natuurlijke en veelal onbewuste wijze.

"Zondags in de Hout, kregen wij ons traditionele La Venezia-ijsje: onze ouders een ijsje van vijf, wij van drie cent en het kwam niet in ons hoofd op om daartegen te protesteren. Het was immers volgens de natuurlijke verhoudingen geregeld, destijds in de jaren dertig. (Leuk hè, bijna volgens de Gulden Snede!)"

In de eerste schooljaren knopen we bij het natuurlijke gevoel voor verhoudingen aan. Vragen we een eerste-klasser zijn twaalf kastanjes eens mooi over de bank te verdelen, dan liggen er in negen van de tien gevallen op elke hoek drie. Ook bij het vormtekenen gaat het allereerst om mooie verdelingen en verhoudingen, om gestructureerde, ritmische vormen.
Het schatten, graag en veel door kinderen beoefend, heeft alles met het verder ontwikkelen van hun gevoel voor verhoudingen te maken.
Zo omstreeks het negende jaar treedt het kind bewuster de buitenwereld tegemoet. Het gaat de wereld met andere ogen bezien en wat beleefd is, wordt nu ook beschouwd. De doorleefde ervaring wordt tot voorstelling, tot 'denkbeeld'. Het vermogen zich tegenover de dingen te kunnen plaatsen, ontwikkelt zich vanaf nu in toenemende mate. Het oordeelsvermogen maakt zich los uit de directe ervaring.

"Onlangs kwamen twee vierdeklassertjes aan de deur met een intekenlijst. Ik tekende achteloos voor twee gulden in: leuk toch, zulke actieve kinderen! Maar ik had beter moeten luisteren! Voor elk rondje, dat zij binnen een kwartier rondom het hertenkamp zouden rennen, moest ik twee gulden betalen. "Dus als we bijvoorbeeld vier keer rondrennen, moet u acht gulden betalen meneer." En lachend verdwenen zij."

Een tweedeklasser zou de situatie zeker niet zo goed hebben doorzien. Vanaf klas vier komen de verhoudingen bij diverse thema's aan de orde, ook naar maat en getal.

"Een olifant eet 325 kg groen per dag, een rhinoceros 50 kg. Hoeveel keer eet een olifant meer dan een rhinoceros?" Dat zijn sprekende feiten, waar de vierdeklasser dol op is. Wat in de tweede en derde klas aan winkelbedrijf en heemkunde is

bedreven, kan nu bewuster rekenkundig worden benaderd en de nieuwe onderwerpen, zoals breuken, decimale maten en het op schaal tekenen, zijn uiteraard geheel uitdrukkingen van verhoudingen.

Omstreeks het twaalfde jaar kan het kind een volgende stap nemen. Aansluitend op bovengenoemd 'groenetersprobleem' zou een volgende vraag kunnen luiden: "Als Artis drie ton groen voor de twee dieren samen aanvoert, hoeveel krijgt de olifant daar dan van?" Hier moet dan een gecompliceerde berekening uitgevoerd worden, waarbij verscheidene bewerkingen op elkaar betrokken worden. Rekenkundig zit dat zo: de olifant en de rhinoceros eten per dag samen 375 kg groen; zij verorberen 3000 kg in (3000 : 375 = 6000 : 750 = 12000 : 1500 = ...) 8 dagen. De olifant heeft daarvan 8 x 325 kg = 2600 kg gegeten. Een beredeneersom dus, die aan het verstandelijke vermogen van een zesde-klasser appeleert.

Omstreeks het veertiende jaar kan de leerling het vraagstuk in een algemene, abstracte vorm oplossen: O : R = 325 : 50 = 13 : 2. O eet $\frac{13}{15}$ x 3000 kg = 2600 kg.
Met deze algebraische benadering kunnen we elke situatie van O en R oplossen, tot grote vreugde van de puber, die nu op zo'n slimme manier de werkelijkheid kan bemeesteren.

Kort samengevat: zie verhoudingen in de juiste verhouding tot leeftijd en de totaliteit van het leerplan. En vooral: zie ze niet over het hoofd!

Verhoudingen in het traditionele rekenonderwijs

Tot in de jaren zeventig werden de verhoudingen in het rekenonderwijs aan het eind van de vijfde klas, meestal pas in de zesde klas behandeld. De breuken, kommagetallen en de procenten waren dan inmiddels al aan de orde geweest. Dat mag op z'n minst merkwaardig heten, want het verschijnsel verhouding ligt ten grondslag aan elk van die onderwerpen.
Waarom dan toch pas zo achteraan in het rekenprogramma? Het antwoord op die vraag wordt duidelijk als we zien welke leerstof behandeld werd. Goed beschouwd werd het *verschijnsel* 'verhouding' nauwelijks in beschouwing genomen. Het ging hoofdzakelijk over evenredigheden ('reden' voor verhouding en 'even' voor gelijk, dus over de gelijkheid van verhoudingen) als a : b = 3 : 4. En bovendien werkte men louter getalsmatig en meetkundige situaties werden niet in beeld gebracht.

Het hoofdstuk verhoudingen bestond in principe uit vier paragrafen.
Eerst een introductie op het begrip en de notatiewijze: "De waarden van een stuiver en een dubbeltje verhouden zich als 5 en 10. Je mag ook zeggen dat ze zich verhouden als 5 staat tot 10, geschreven als 5 : 10. En dat is hetzelfde als 1 : 2. Dus stuiver : dubbeltje = 1 : 2." (Een echte schoolmeester voegde daar aan toe: "het moet natuurlijk zijn, de *waarde van* een stuiver staat tot de *waarde van* een dubbeltje is als één staat tot twéé.") Hier staat ook te lezen dat een dubbeltje twee keer zoveel waard is als een stuiver. Of dat een stuiver de helft is van een dubbeltje.
Dan kwam er een paragraaf met opgaven als: "Twee kapitalen verhouden zich als 3 : 4. Het grootste kapitaal is f 200,-, hoe groot is het kleinste kapitaal?"
De oplossing verliep via een evenredigheid als K : 200 = 3 : 4. Soms pastte men de hoofdeigenschap van de evenredigheden toe: 4 x K = 3 x 200, dus K = $\frac{600}{4}$ = 150.

Wie inzag dat 200 = 50 x 4 en dus K = 50 x 3 moest zijn, was sneller klaar.
De volgende paragraaf behandelde opgaven als: "De aantallen knikkers van Jan en Wim verhouden zich als 3 : 5. Samen hebben ze er 40. Hoeveel heeft elk?"
De oplossing ging ongeveer aldus: 'Jan' : 'Wim' = 3 : 5. J + W = 40. Dan heeft Jan $\frac{3}{8}$ x 40 = 15 en Wim $\frac{5}{8}$ x 40 = 25 knikkers. Het getal 8 kreeg je door 3 en 5 op te tellen, en je wist dat omdat het aantal knikkers was gegeven, dat ze *samen* hadden.
In de laatste paragraaf was de verhouding en het verschil gegeven: "Twee stokken verhouden zich als 3 : 8, de ene stok is 40 cm langer dan de andere. Hoe lang zijn de beide stokken?"
Oplossing: Stok A = $\frac{3}{5}$ x 40 cm = 24 cm. De andere is dus 64 cm. (Routineuze rekenaartjes vonden dit via $\frac{8}{5}$ x 40 cm = 64 cm).

In de jaren vijftig werd de didactiek van de verhoudingen verrijkt met het zogeheten verhoudingsblok. Hiermee konden de drie genoemde typen vraagstukken in één klap en met inzicht worden opgelost.
De evenredigheid a : b = 3 : 6 werd in een schema geplaatst:

a	b	of	a	3
3	6		b	6

Kijkend van a naar b zie je ook de stap van 3 naar 6. Dat is dus een vermenigvuldigingsfactor van 2. Je krijgt b door a met 2 te vermenigvuldigen.

Is nu bijvoorbeeld gegeven dat B – A = 40, zoals in het vraagstukje met de twee stokken, dan breid je in gedachten het schema uit:

A	B	B – A = 40
3	8	8 – 3 = 5 (Vermenigvuldigingsfactor is: 8)

Je ziet dat de stap van de onderste rij verhoudingsgetallen naar de bovenste rij 'werkelijke' getallen een is van vermenigvuldigen met 8. Hieruit volgt direct a = 8 x 3 en b = 8 x 8

Dit verhoudingsblok is nauw verwant met de 'evenredigheidsmatrix' die door de didacticus P.M. van Hiele werd geïntroduceerd. In dit boek zijn we het idee ook al tegenkomen in het hoofdstuk over breuken: de verhoudingstabel. Met deze constatering wordt ook duidelijk dat de verhoudingen in het rekenonderwijs al vóór de introductie van de breuken, vóór de vierde klas dus, aandacht verdienen.

Kinderen ontmoeten verhoudingen
Observatie: het haantje van de toren
Met een paar kleuters bij een toren. "Kan iemand vertellen hoe groot dat haantje op de toren is?" K: "Ik weet het." "Zo groot ongeveer? Wat denk jij?" K: "Hij is nog veel groter." "Ik zag laatst dat ze de haan naar beneden haalden. Hij was wat kaal geworden en ze wilden 'm schilderen. Toen stond hij dus op de grond. Hier vlak bij. Wat denk je, hoe groot was het haantje toen hier?" K: "Zoiets. Een kip is toch niet zo lang!" "Nee, een echte kip niet. Maar is dit een echte kip?" K: "Nee."

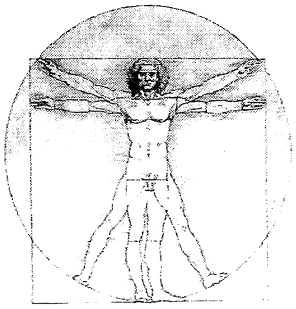
"Het is een haantje van ijzer. Hoe groot is een vliegtuig in de lucht? K: "Heel klein!" K: "Ik weet het, net zo groot als het schoolplein."... "Denk nog eens aan de haan. Hoe groot was die op de toren? En hoe groot als die hier op de grond staat?" K: "Groter, nog veel groter." "En als ik nu naar boven zou gaan op de toren, hoe groot zou ik dan worden?" K: "Zo'n klein mannetje." "Nu neem ik het haantje mee als ik naar boven ga. En ik word kleiner en kleiner." K: "Ik zie geen haan." "Nu moet jij zeggen hoe groot ik ben als je me boven op de toren ziet."... K: "Zo'n klein mannetje." "En de haan naast me?" K: "Zó klein." "Nu komen we allebei naar beneden. Ik heb de haan meegenomen. Hoe groot zou die haan zijn?" K: "Dan is de haan net zo groot als de schoolbank ..."
(Uit Goffree,F.(1979). *Leren onderwijzen met wiskobas*, IOWO Utrecht.)

> Of je zo'n vraag aan kleuters moet stellen? Misschien beter aan de leerligen van de vierde klas, die op weg zijn naar de grote kerk om de toren te beklimmen en dan de stad in vogelvluchtperspectief willen zien.

Observatie: Bastiaan en de regenwolken
Bastiaan (7;6). Na een reeks zonnedagen ziet hij wolken en zegt: "Het gaat regenen." "Neen", zeg ik, "dit zijn heel hoge wolken, daar komt geen regen van; regenwolken zijn laag en donker."Hij: "En hoe hoog zijn die wolken?" Ik: (overdrijvend) "Tienduizend meter." Hij: "En hoe hoog zijn die regenwolken?" Ik: "Duizend meter." Hij: "Dus (met de hand op de grond) als wij hier zijn en de regenwolk zó hoog (wijst ongeveer dertig centimeter boven de grond), dan zijn dat (wijst ongeveer één meter boven de grond), geen regenwolken."
(Geciteerd in *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, jrg.8 nr.2, blz.57)

Het blijkt dat het verschijnsel verhoudingen niet zonder meer aan kinderen voorbijgaat. Ze voelen soms de zaak intuïtief heel goed aan, kunnen zelfs aan hun intuïtieve noties uiting geven, in gebaar en woord. Maar ook kunnen ze door de omstandigheden misleid of door hun intuïtie in de steek gelaten worden. Hoe het ook zij, de wereld om hen heen en de kinderen zelf geven aanleiding om verhoudingen niet buiten beschouwing te laten.

Het verschijnsel verhoudingen
Onze wereld zit vol met verhoudingen, visueel en numeriek (meetkundig en getalsmatig), onopvallend en aandachttrekkend, om accenten te plaatsen en om verschillen te verhullen. Vul zelf maar in en aan, wie om zich heen ziet en een verhoudingenbril opzet, kan daar tegen deze bewering geen bezwaar hebben.
Wat overigens direct opvalt, zijn de zaken waarbij sprake is van 'wan'verhouding. Neem bijvoorbeeld een karikatuur, waarin karakteristieke trekken buiten verhouding zijn weergegeven. Maar ook de plaat waarop het menselijk lichaam in bepaalde ontwikkelingsstadia is weergegeven, vraagt aandacht voor verhoudingen: Is het hoofdje van de baby niet veel groter dan dat van de volwassene verder op in de rij? Natuurlijk niet in absolute zin, maar wel 'naar verhouding'. Wie let daar in het bijzonder op? De schilder, die een jong kind wil tekenen! Diezelfde schilder weet veel meer van verhoudingen met betrekking tot het menselijk lichaam. Een mooie geheugensteun werd eens getekend door Leonardo da Vinci:



Het zijn verhoudingen die opvallen als je je er níet aan houdt. Veel gewone verhoudingen vallen haast nooit op. Neem de vakantiefoto's, waarop de mensen, dieren en dingen vele malen kleiner staan afgebeeld dan ze in werkelijkheid zijn. Niemand zal daar een aanmerking op maken, want alle objecten zijn naar verhouding evenveel verkleind. En geldt niet hetzelfde voor hetgeen juf of meester op het bord zet? Die vormtekening van een meter lijkt achter in de klas maar een decimeter en wordt vervolgens weer vergroot tot twintig centimeter, geen kind of leraar die daarover valt. En dan de dia's of misschien wel de transparanten op de overheadprojector: vergrotingen van verkleiningen van de werkelijkheid. Wie de dia tegen het licht houdt, meent toch 'hetzelfde te zien' als hetgeen op de wand wordt geprojecteerd! Wij zijn eraan gewend en zolang niet aan de onderlinge verhoudingen wordt getornd, valt het verschijnsel ons niet meer op.

Wanneer maken we gebruik van verhoudingen? Daar is al sprake van op het moment dat kinderen zich in de fysieke ruimte gaan oriënteren. Als ze schattingen maken, bijvoorbeeld: "Wat is verder vanaf het tafeltje voor de klas, de deur in het lokaal of de kast achterin? Even afpassen met stappen." Of als kinderen een legpuzzel maken. Eén achteloos gesteld vraagje kan de aandacht richten: "Hoe groot denk je dat de puzzel zal worden?" Het antwoord kan globaal, louter met gebaren worden gegeven. Net zoals Bastiaan dat deed met de regenwolken. Maar het kan ook heel precies, als kinderen het meten al onder de knie hebben.
Foto's, waar de verhouding onopvallend aanwezig is, geven ook aanleiding tot het doen van schattingen en dus het gebruiken van het verschijnsel verhoudingen.

"Hoe hoog is die boom? Ik denk dat dat grootste kind ongeveer 1,55 m is. Dan is de boom, laten we zeggen ..."

Wie schat, zoekt vergelijkingsmateriaal. We zeggen ook wel: referentiepunten. Ieder mens bouwt in de loop van de jaren een repertoire op van persoonlijke referentiematen. Ik ben 1.69 m lang en dus schat ik de hoogte van die keukenplank op ongeveer 1.85 m. Deze balk is ongeveer 2,5 cm dik, dat zie ik door mijn duim ertegen aan te houden. Een mok is ongeveer 2 dl, dus kan ik gemakkelijk een halve liter melk afpassen: $2\frac{1}{2}$ mok. En in mijn kookboek vind ik dat één theelepeltje hetzelfde is als drie gram. Maar dan gaat het wel over ...
Later komt de laatste overweging terug als het begrip dichtheid aan de orde is. Massadichtheid, wat vroeger soortelijk gewicht werd genoemd. Het is de verhouding van gewicht en volume; anders gezegd is het het gewicht van een bepaalde hoeveelheid van een stof. Hoeveel kg weegt 1 dm^3 lood? Of, meer van deze tijd: wat is de massa van 1 m^3 lood?
Ook bevolkingsdichtheid (verhouding van aantal bewoners en oppervlakte van het land waarop gewoond wordt).
Met deze verhoudingsproblematiek zijn we te snel door de wereld van de verhoudingen heen gesneld. We hebben het vergroten van foto's en platen (kopieerapparaten doen dat momenteel procentsgewijs) niet genoemd. En het werken met landkaarten en stadsplattegronden, waarbij het begrip schaal essentiëel is. Zowel getalsmatig (schaal 1 : 10 000 bijvoorbeeld) als meetkundig (dit lijnstuk —— is 1 km). Ook hebben we de modelbouw niet behandeld, met speelgoed op schaal of Madurodam op schaal 1 : 25. Ook de Mercatorprojectie niet, waarop Groenland naar verhouding veel te groot is afgebeeld.
En wat te zeggen van de verhoudingen die schaduwen met zich meebrengen? De schaduw van de vlaggemast was om vijf uur langer dan om twaalf uur. Wat zegt die lengte, van de hoogte van de zon en dus van de tijd? Later, in klas 10, zie je dat het om een hoek, dus om een *goniometrische* verhouding gaat.
We zijn meetkundig bezig. Dat geldt ook voor het verschijnel van de grijstinten op papier (of op een computerscherm). De indruk 'grijs' ontstaat door een mengsel van witte en zwarte puntjes. De verhouding 'wit : zwart' bepaalt de donkerheid van het grijs:

10 % zwart

50 % zwart

Mengsels worden ook bepaald door verhoudingen. Kinderen hebben ervaringen op dit terrein met limonadesiroop, waarschijnlijk niet zozeer getalsmatig, maar zeker intuïtief.
Pas echt moeilijk wordt het rekenwerk als we ons begeven op het terrein van scheikunde. Daar moeten verdunningen precies naar voorschrift gemaakt worden. De verhoudingen van het metriek stelsel ("Hoeveel cc gaan er ook weer in een ml?") komen nu ook in beeld. En hoe zit dat ook weer met de verhouding tussen km/uur en m/sec of het angelsaksische miles/hour (knoop)?
Omrekenen doe je ook op reis, bijvoorbeeld naar de V.S.. Guldens voor dollars, tegen een vastgestelde verhouding (wisselkoers). En wie in het buitenland prijsbewust is, loopt al winkelend verhoudingsrekenen te beoefenen.

Met voorgaande beschouwing is het verschijnsel nog lang niet uitputtend behandeld. Zo zijn voor de hand liggende zaken als prijs-kwaliteit verhouding, prijs per gewicht-lengte-aantal en dergelijke, inflatie en koopkracht, indexcijfer, kiesdeler, kijkdichtheid, ... niet behandeld. Een leraar, die oog heeft voor het onderwerp, hoeft niet ver te zoeken. En als hij ook verder ziet dan de basisschool, komen onderwerpen als lineaire verbanden, formules en grafieken in zicht.

Verhoudingen in het leerplan

Het is niet mogelijk een volledig leerplan voor verhoudingen te geven. Dat moet met de bovenstaande verkenning van het gebied al duidelijk geworden zijn. Verhoudingen moeten in het kader van veel andere onderwerpen aan de orde worden gesteld. Dit houdt een gevaar in, namelijk dat het onderwerp in de vergeethoek geraakt. Er kàn echter van een minutieus gefaseerde leergang, zoals in het geval van de tafels en de cijferalgoritmen, hier geen sprake zijn omdat elke Vrije Schoolleraar de onderwerpen kiest, die in zijn klas geschikt zijn en hij ze vervolgens in de context van andere onderwerpen aan de orde stelt.
Globaal kan men het volgende als richtlijn beschouwen: Verhoudingen vormen in de eerste drie klassen geen leerstof die expliciet aan de orde komt. Toch is er een bedding voor te vormen middels het schatten en vormtekenen. In de vierde klas is door het denken in breuken een goede basis te leggen voor de verhoudingstabel, die handig is om verhoudingsvragen mee te bewerken. Zo ontstaat de verhouding als relatieve maat.
De laatste stap kan dan in de hogere klassen plaatsvinden, waar inzicht in de dubbele open getallenlijn en het gebruik van de verhoudingstabel worden geleerd. Met de laatste kunnen verhoudingssvragen ook algoritmisch worden opgelost. Bij een goed doordachte keuze kan in de loop van acht jaar het onderwerp verhoudingen doorgewerkt worden. Tot en met de toepassingen binnen en buiten de wiskunde, tot en met de lineaire functies en als een goede basis om het gebied van de hogere machts- en exponentiële functies te betreden.

Nu volgen suggesties om het onderwerp door alle lessen en perioden heen aan de orde te stellen.

1 vormtekenen

Wat op het bord voorgedaan is, wordt 'in verhouding' overgebracht op het eigen papier.

2 Het elementaire meten

Hier worden natuurlijke grootheden vergeleken, vaak met behulp van het eigen lichaam als maatstaf. Meetgetallen zijn verhoudingsgetallen.

3 Schatten met referentiematen

In het dagelijks leven, maar ook op foto's en platen. Het is een waar feest wanneer de kinderen in de lagere klassen mogen schatten. Er verschijnen vele antwoorden op het bord. Ze zoeken nog houvast bij elkaar: "Zou ik er helemaal naast zitten of heeft Johan 'het' te ruim genomen?" Dan mag iemand het gaan nameten. Met ingehouden adem wacht de klas af, tot de 'nameter' met het juiste antwoord terug komt en een gejuich stijgt op, wanneer iemand dat antwoord ook geschat heeft.

De bakker had aan de school een oude balans uitgeleend met grote gewichten. We waren net begonnen met metselen in de huizenbouwperiode en een eerste zakje met cement stond in de hal klaar. Ik gaf één van de kinderen de opdracht het te halen en op de balans te plaatsen. Daarna gaf ik hem een gewicht in zijn handen en vroeg: "Hoeveel van die gewichten moet ik aan de andere kant op de weegschaal zetten?" Daarna deden we dat dan ook met grotere en kleinere gewichten.

Zo is tot in de hoogste klassen bij kinderen in het 'schatten' gevoel voor verhoudingen te stimuleren.

4 ruilhandel

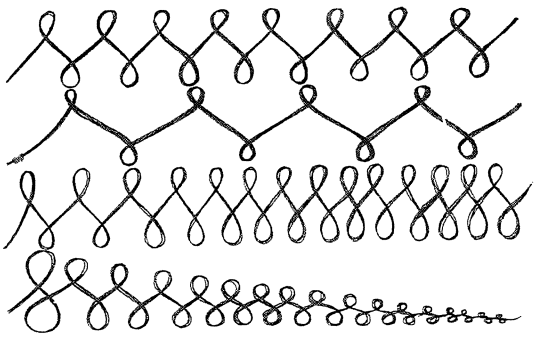
Het begint voor de kinderen al in de knikkertijd op het schoolplein. Knikkers, bammen en supers staan in vaste verhouding tot elkaar. Omrekenen naar knikkers is het gemakkelijkst om ruilhandel te kunnen plegen. Maar op een zeker moment komen koerslijstjes in de klas ...

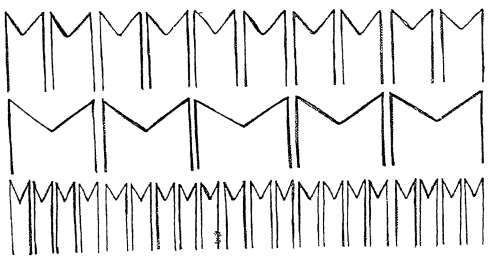
5 Vergroten en verkleinen

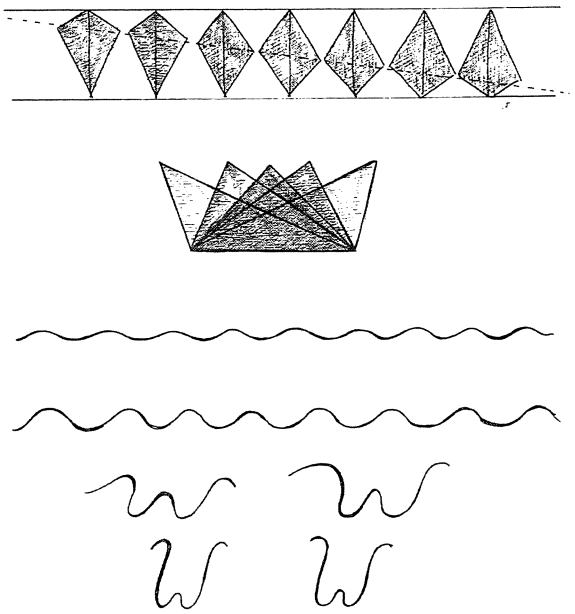
Met roosters op papier en met een projector in werkelijkheid.
Bouwen van een voorbeeld, een plattegrondje van de klas maken, een tekening maken van de weg van huis naar school, met karakteristieke punten op de juiste plekken.
Op een overheadprojector liggen drie munten. Op de wand zijn drie zwarte cirkelschijven te zien. Welke munten zijn dat? Het antwoord wordt gemakkelijker als één van de munten wordt geïdentificeerd als een dubbeltje. Hoe kunnen we zeker zijn?

6 Vervormen

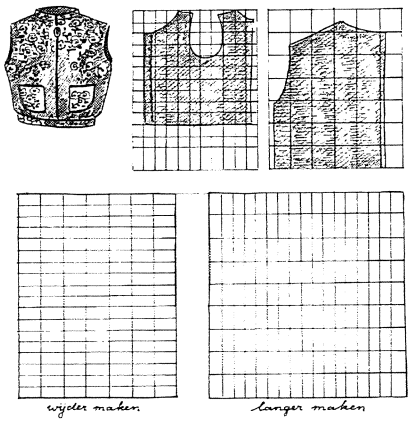
Met behulp van roosters: van vierkantenrooster naar rechthoeken. Uitrekken in de lengte of in de breedte. De verhoudingen 'kloppen niet meer'.







In de handwerklessen van de zevende klas maken de kinderen vergrotingen en verkleiningen met behulp van een raster. Wellicht hebben ze in de zesde klas al eens de kaart van het Romeinse Rijk vergroot, maar er komt meer bij kijken als het erom gaat een kledingsstuk passend te krijgen.
In de voorgaande klassen maakten de kinderen patronen voor handschoenen, stoffen beesten of sloffen, door bijvoorbeeld de voet om te trekken en dan de stof iets groter te knippen. Nu, in de zevende klas, wordt er een blouse ontworpen. Om een blouse of bodywarmer op de juiste maat te krijgen bepalen de kinderen de verhouding tussen patroon en lichaam. Het meten aan lichaam en patroon levert dan de vergrotingsfactor, die vertelt hoe de ruitjes van het raster vergroot moeten worden.
Daarbij komt het vraagstuk of het kledingstuk misschien langer of wijder moet worden dan het patroon aangeeft. Dat vraagt om veranderingen (vervormingen), waarbij de verhoudingen niet in stand blijven. Hoe brengen we die vervormingen tot stand in het op ruitjespapier getekende patroon?



En vanuit een andere invalshoek komen er vragen als: "Wat is er aan de hand met die karikaturen?" "Is het hoofd van die getekende baby niet te klein?" "Hoe lang moet je de armen van een mens tekenen?"

7 Referenties voor schaal
Gegeven een foto van een bij. De afbeelding van het insect is veel groter dan het in werkelijkheid is. Dat kun je zien omdat er en liniaaltje naast ligt.

Je ziet dat het een vergroting is. Wie weet hoe groot die bij in werkelijkheid is? Op het fotokopieerapparaat kun je ook vergroten en verkleinen. Wat betekent een vergroting van 125%? Probeer het maar uit.

8 schaal
Maak een schets van je kamer op schaal. Wat is een geschikte schaal? Lukt het met 1 : 10? Of moet je naar 1 : 20? Welke schaal staat op stadsplattegrond? Wat betekent die visuele schaal: een lijntje van 1,5 cm staat voor 1 km? Wat betekent schaal 1 : 100 000? Weet je een grotere schaal? Weet je wat een curvimeter is? Hoe werkt dat met schalen?

9 Schattend rekenen met aandacht voor de relatieve fout
Afronden gebeurt binnen bepaalde grenzen. Hoever ga je door met de staartdeling 3 / 100,0000\ ... als het erom gaat een plank van 1 meter in drie gelijke plankjes te zagen? Welke benadering is nauwkeuriger: $7,8 \approx 8$ of $97,8 \approx 100$?

10 Opgaven 'onderweg'
Die kaars heeft volgens de fabriek 10 branduren. Hoelang zou hij al gebrand hebben? Die wegwijzer moet ergens op de weg van Driebergen naar Arnhem gestaan hebben? Waar precies? Hoe kunnen we een 'schaalmodel' maken van de aarde, maan en zon? Kunnen we ook de grootten van de hemellichamen op die schaal maken? Leg eens uit waarom de zon en de maan evengroot lijken als ze aan de hemel staan? Weet je een manier om de snelheidsmeter in de auto van je vader (of een ander) te controleren? Kun je uitrekenen hoeveel de afstand van 12 cm op een kaart met schaal 1 : 100 000, in werkelijkheid is?

11 Stok-schaduwmodel
Zet een stok van één meter vertikaal op het schoolplein en meet met vaste tussenpozen de schaduwlengte op. Gebruik de verhouding stok-schaduw om de hoogte van een boom, schutting, hek, muur of iets dergelijks in de buurt te vinden. Let eens op de driehoeken, die hebben dezelfde vorm.

12 Dichtheid en mengverhouding

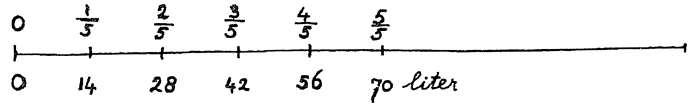
"Pap kom eens kijken, deze struik zit vol bosbessen, hij ziet helemaal blauw, de blaadjes zie je haast niet meer!" We kwamen allemaal aanrennen, misschien zaten er op die fantastische plek van Bride nog meer van die struiken. "Poeh, wat een klein struikje", riep Jannes mijn andere spruit, "de mijne ziet wel niet zo blauw, je ziet meer blaadjes, maar er zitten veel meer bessen aan! Ik ga terug." "Dat kan niet!" zei Bride, "ik heb nog nooit zo'n volle struik gezien."
Wie heeft er gelijk? Als je rekening houdt met de grootte, verhoudingsgewijs dus, dan zitten er absoluut gezien misschien wel meer bessen aan de struik van Jannes, maar relatief gezien zijn het er minder.
Verhoudingsgewijs ... in verhouding tot wat? Relatief ... ten opzichte waarvan?
Als de struik van Jannes even groot was als die van Bride dan zaten er aan zijn struik minder bessen. Om Bride gelijk te geven moet je dus beide struiken even groot denken, terwijl je de blauwheid -dat is de verhouding tussen bessen en blaadjes- van elke struik gelijk laat en de afmetingen in gedachten verandert.

13 Verhoudingen in de breukenleergang

Zie hoofdstuk 5 en denk in het bijzonder aan de introductie van de dubbele getallenlijn. Ook het breukenelastiek is gebaseerd op inzicht in verhoudingen.

Enkele opgaven ertussendoor: Ze kunnen nu ook verhoudingsopgaven aan. Voorbeelden:

- Dit recept ... is voor vier personen er komen negen gasten, ...
- Mijn flat is $1\frac{1}{2}$ keer zo hoog als die aan de overkant, die is 20 meter hoog Hoe hoog is mijn flat ?
- De vader van Brandaan ziet op zijn dashbord dat de benzinetank nog maar voor ongeveer $\frac{2}{5}$ gevuld is. Er passen 70 liter in een volle tank. Maar er moeten nog heel wat kilometers gereden worden voor hij thuis is. Hoeveel liter ongeveer zit er nog in die tank?
  Deze opgave is heel goed op te lossen met de dubbele open getallenlijn.



14 Introductie en verkenning van de verhoudingstabel

Het begint eigenlijk al bij de tafels van vermenigvuldiging, een rij als 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ... hoort bij de rij 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... Zet je beide rijen in één mooi schema:

1	2	3	4	5	6	7	....
3	6	9	12	15	18	21	....

dan heb je een verhoudingstabel, met vele eigenschappen om al te verkennen. Bijvoorbeeld in de bovenste rij 1 + 4 = 5, geeft in de onderste rij ook een juiste optelling: 3 + 12 = 15. Logisch, zeggen we later, alle getallen zijn naar verhouding vergroot (vermenigvuldigingsfactor 3).

In de lessen over breuken, in de vijfde klas, komt de verhoudingstabel uitvoerig in beeld. Daar ziet men dat een breuk ook steeds een verhouding weergeeft, waarbij deel (teller) op een geheel (noemer) betrokken wordt.

Kinderen kunnen het 'relatieve' van de getallen in de context van verhoudingen ook (leren) ervaren, wanneer ze bezig zijn met gelijkwaardige breuken. Met het breukenelastiek (blz. 191) is dit ook mooi te demonstreren. We hoeven het hen daarbij nog niet in abstrakte zin bewust te maken, maar ze werken er mee wanneer een gelijkrij wordt aangelegd:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots\ldots$ en $\frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \ldots\ldots$ en $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \ldots\ldots$

of in tabel vorm:

3	6	9	....
4	8	12	.....

De verhoudingstabel is op te vatten als notatieschema (om evenredigheden in op te slaan) en rekenschema (om te rekenen met verhoudingsgetallen) voor het oplossen van verhoudingsproblemen. Hiermee kunnen we nu verschillende opgaven te lijf:

- Hoeveel kwartjes in 13 gulden?

guldens	1	2	3	10	13	(= 10 + 3)
kwartjes	4	8	12	40	52	(= 40 + 12)

- Als 1 Franse franc ongeveer 32 cent is, hoeveel gulden krijg je dan ongeveer voor f 250,-?

f	0,32	0,96	ongeveer	1	100	50	200	250
Frs	1	3	ietsje meer dan	3	300	150	600	750

De benadering scheelt dus ongeveer 0,12 francs, laat maar zitten.

- Als 0,25 % van een bedrag f 70,- is, hoe groot is dan het hele bedrag?

%	0,25	25	100
bedrag	70	7000	28000

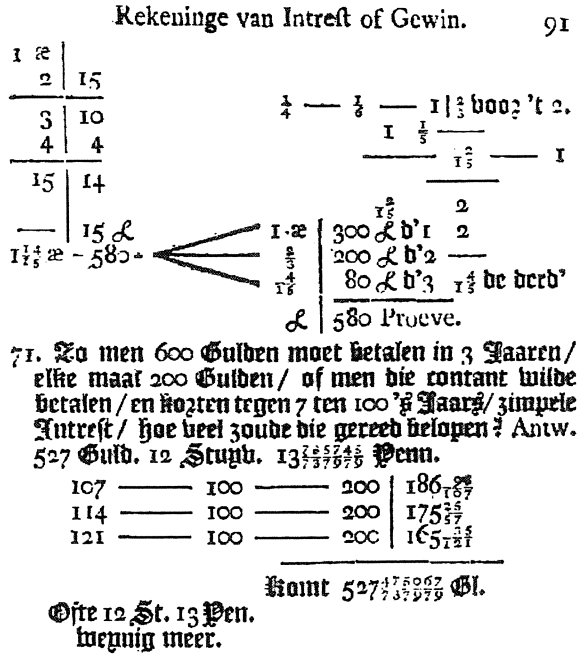
Procenten zijn dus op te vatten als op 100 genormeerde verhoudingen. (In plaats van 1 : 4 zegt men dan 25 : 100, ofwel 25%).

- We kopen in voor f 12.500,-; we willen 8 % winst maken. Wat is de nieuwe prijs?

Inkoop	100 %	f 125	f 12.500
Winst	8 %	f 10,-	f 1.000
Verkoop	108 %	f 135,-	f 13.500

In dit voorbeeld zien we dat uit verhoudingen (inkoop : winst) nieuwe verhoudingen (inkoop : verkoop) door optelling (en de andere basisbewerkingen) te vormen zijn. De verhoudingstabel maakt dat rekenwerk overzichtelijk.

6.3 Procenten



Rekeninge van Intreſt of Gewin. 91

71. So men 600 Gulden moet betalen in 3 Jaaren/ elke maat 200 Gulden/ of men die contant wilde betalen/ en hoǫten tegen 7 ten 100 'ſ Jaars/ zimpele Intreſt/ hoe veel zoude die gereed belopen? Antw. 527 Guld. 12 Stuyv. $13\frac{7}{7}\frac{5}{3}\frac{5}{7}\frac{7}{9}\frac{4}{7}\frac{5}{9}$ Penn.

107 —— 100 —— 200 | $186\frac{98}{107}$
114 —— 100 —— 200 | $175\frac{25}{57}$
121 —— 100 —— 200 | $165\frac{35}{121}$

Komt $527\frac{47}{73}\frac{5067}{979}$ Gl.

Oſte 12 St. 13 Pen. weynig meer.

Uit de *Cijfferinge* van Mr. Willem Bartjens, 1 February, 1763.

Geschiedenis

Bovenstaande opgave is overgenomen uit een van de vele herdrukken van het beroemdste rekenboek in de Nederlandse taal, de *Cijfferinge* van Willem Bartjens. Het woord 'procent' komt er niet in voor, maar het gaat wel over procenten, men wil namelijk van die 600 gulden 7 ten honderd rente per jaar ontvangen. Dat is van elke 100 gulden er dus 7 gulden op toe krijgen. Of anders gezegd: voor elke 100 gulden die je uitleent, krijg je er na één jaar 107 terug.

De eigenlijke vraag is in dit geval anders, en behoorlijk lastig: "Wat mag je verwachten te ontvangen als men je nu contant terugbetaalt?" Dan kun je dat bedrag zelf op rente zetten en dan groeit het successievelijk weer in drie jaar aan tot 600 gulden.

De antwoorden en de berekeningen zijn er in het boek bij gegeven. Voor het rekenen is gebruik gemaakt van de 'Regel van Drieën'. Eigenlijk de 'Verkeerde Regel van Drieën', die in de regel 107 _____ 100 _____ 200 | $186\frac{98}{107}$ tot uitdrukking is gebracht: "zoals 100 groeit tot 107, zo groeit het getal dat ik zoek tot 200." Wie de goede opstelling van de getallen heeft,107 _____ 100 _____ 200 , kan gaan rekenen, middelste getal maal het meest rechtse, gedeeld door het meest linkse getal: $\frac{100 \times 200}{107} = 186\frac{98}{107}$, enzovoort.

Wie denkt dat deze opgave in het rekenprogramma van de Vrije School anno 2000 thuishoort, heeft het mis. De opgave kan hoogstens als uitdaging voor een rekenbolleboos achter de hand worden gehouden. Nee, deze opgave is bedoeld om te laten zien dat het rekenen met procenten niet van de laatste tijd is en dat het behoorlijk lastig kan zijn om een ogenschijnlijk eenvoudige opgave met de gegeven middelen op te lossen.